

# 非線形力学系の分岐理論と計算法

上田 哲史

徳島大学高度情報化基盤センター  
tetsushi@is.tokushima-u.ac.jp

November 24, 2006

於 日本船舶海洋工学会ストラテジ研究委員会



# 徳島の非線形問題研究者



- 篠原 能材 名誉教授 (現：四国大学)
- 牛田 明夫 名誉教授 (現：徳島文理大学)
- 川上 博 副学長
- 吉永 哲哉 教授
- 西尾 芳文 助教授
- その他 沢山の人々



# 本日の内容

分岐問題の数値計算 — リクエストいただいたもの

- 非自律系における周期解の分岐問題 (局所的分岐)
- 自律系におけるホモクリニック軌道 (大域的分岐)



$n$ 次元非自律系

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda)$$

- $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ .
- $f : C^\infty$
- $f(t, x) = f(t + 2\pi, x)$ .

2次元非自律系：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y, \lambda) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, \lambda) + e(t) \end{aligned} \quad (1)$$

具体例：強制 van der Pol 方程式

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + \gamma_1 x - \gamma_3 x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= -x - ky + B_0 + B \cos vt \end{aligned} \quad (2)$$



$t = 0$  で  $x_0$  を通る解:

$$x(t) = \varphi(t, x, \lambda), \quad x(0) = x_0.$$

周期解:

$$x(2\pi) = x_0 = \varphi(2\pi, x, \lambda)$$

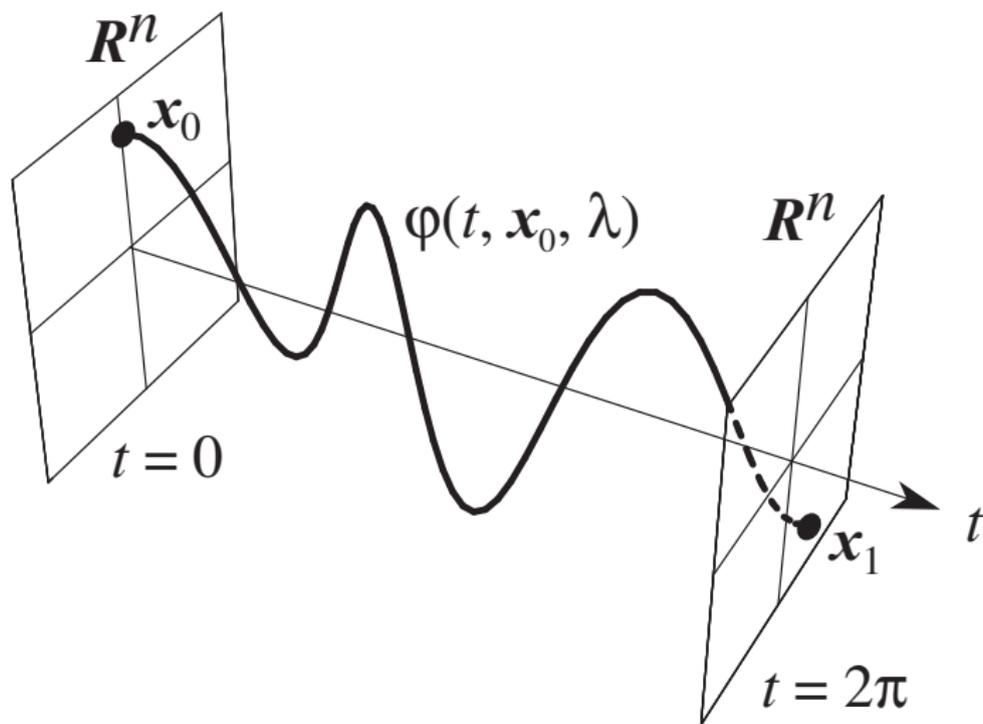
Poincaré 写像:

$$\begin{aligned} T_\lambda: \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R}^n \\ \mathbf{x}_0 &\mapsto \mathbf{x}_1 = T_\lambda(\mathbf{x}_0) \\ &= \varphi(2\pi, \mathbf{x}_0, \lambda) \end{aligned} \quad (3)$$

初期値  $(x_0, y_0)$  から  $2\pi$  おきに解軌道をサンプリングし点列を得る: **連続系から離散系への変換**

$$\begin{aligned} &\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, \} \\ &= \{\mathbf{x}_0, T_\lambda(\mathbf{x}_0), T_\lambda^2(\mathbf{x}_0), \dots, T_\lambda^n(\mathbf{x}_0), \dots\} \end{aligned}$$





- 同じ位置を打ち続ける点が存在する: **固定点 (fixed point)**

$$\{x_0, x_0 \cdots, x_0, \cdots, \}$$

### 固定点条件

$$T(x_0) - x_0 = \mathbf{0}$$

元の連続系では **1-周期解** が対応する.

- $n$  回マップすると元の点に戻る **周期点 (periodic point)**:

$$\{x_0, x_1, x_2, x_0, x_1, \cdots, \} \quad \text{3-周期解.}$$

### $n$ -周期点条件

$$T^n(x_0) - x_0 = \mathbf{0}, \quad x_i \neq x_0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

元の連続系では  **$n$ -周期解** が対応する.



# 固定点/周期点の分岐

## 分岐現象

固定点や  $n$ -周期点が、パラメータの変化により位相的性質 (安定性) を変える現象

特徴一覧：

周期倍分岐 (period-doubling bifurcation) 2 周期点 (2 周期解) が発生する.

接線分岐 (tangent bifurcation) 周期解が消え去る.

Neimark-Sacker 分岐 (NS bifurcation) 不変閉曲線 (トーラス) が発生する.



# 例題：Duffing-Rayleigh 方程式

一つの方程式で局所分岐が全て楽しめる：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= \epsilon(1 - \gamma y^2)y - x^3 + B_0 + B \cos vt\end{aligned}\tag{4}$$

**デモにて発生する現象をご覧ください**



# Newton 法おさらい

問題：  $F(x) = \mathbf{0}$  ,  $x \in R^n$

- 近似値  $x(0)$  を持っている.
- $F$  は状態  $x$  について微分可能

繰り返し手続き

$$\begin{aligned}x(k+1) &= x(k) + h \\ F'(x(k))h &= -F(x(k))\end{aligned}$$

$F'(x(k)) = (\partial f_i / \partial x_j)$  : Jacobi 行列



# 固定点条件を Newton 法に実装

繰り返し手続き

$$\begin{aligned}x(k+1) &= x(k) + h \\ F'(x(k))h &= -F(x(k))\end{aligned}$$

$$F(x_0) = x_0 - T(x_0) = \mathbf{0}$$

Newton 法に必要な  $F'$  は…

$$F'(x_0(k)) = I - \frac{\partial T}{\partial x}(x_0(k))$$

2次元の場合：

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x_0(k)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0}(2\pi, x_0(k), y_0(k)) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0}(2\pi, x_0(k), y_0(k)) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0}(2\pi, x_0(k), y_0(k)) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0}(2\pi, x_0(k), y_0(k)) \end{pmatrix}$$



更新量  $h$  は Gauss の掃き出し法などで解けるが…

$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(2\pi, x_0)$  について, これら (偏微分の値!) をどう  
やって求めるか?

- $T$  や  $\varphi$  は関数では表されない
- ましてやその導関数は関数では書けない…

$dx/dt = f(t, x)$  に解  $x(t) = \varphi(t, x_0)$  を代入 :

$$\frac{d\varphi}{dt}(t, x_0) = f(t, \varphi(t, x_0)).$$

次に  $x_0$  で微分:

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{d\varphi}{dt}(t, x_0) \right) = \frac{\partial}{\partial x_0} (f(t, \varphi(t, x_0)))$$

左辺の微分の順序は変更できる:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t, x_0) \right) = \frac{df}{dx}(t, \varphi(t, x_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t, x_0).$$



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t, x_0) \right) = \frac{df}{dx}(t, \varphi(t, x_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t, x_0).$$

これは、時変線形行列微分方程式  $dX/dt = AX$  の形となっており、**変分方程式**といわれる。

- 変分方程式を Runge-Kutta 法などで  $t = 0$  から  $t = 2\pi$  まで積分すれば、 $\partial \varphi(2\pi)/\partial x_0$  が求められる。
- $\partial \varphi/\partial x_0(0, x_0) = I$
- 元の方程式も同時に Runge-Kutta で解けばよい
- $n$ -周期点が求めたい場合は、積分を  $2n\pi$  まで行えばよい。



# 差分方程式の Jacobi 行列とその固有値

$$\frac{\partial T(x_0)}{\partial x_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0}(2\pi, x_0, y_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0}(2\pi, x_0, y_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0}(2\pi, x_0, y_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0}(2\pi, x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

の固有値で特徴づけられる.



Poincaé 写像:

$$x(k+1) = T(x(k))$$

この方程式は陽には得られていないことに注意.  $T$  の固定点  $x_0$ :

$$x_0 = T(x_0)$$

固定点近傍を  $x(k) = x_0 + \xi(k)$  として

$$x(k+1) = x_0 + \xi(k+1) = T(x_0 + \xi(k))$$

右辺に Taylor 展開を施すと,

$$\text{r.h.} = T(x_0) + \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_0} \xi(k) + \dots$$



# 固定点の安定性

$$\xi(k+1) = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_0} \xi(k) \equiv J\xi(k)$$

固有値問題：

$$(J - \mu I)\xi(0) = \mathbf{0}$$

$n$ 次元ならば、 $n$ 個の根  $\mu_i, i = 1, 2, \dots, n$  がある。

- $\mu_i$  : 固有値.
- $\xi_i(0)$  : 固有ベクトル

特性方程式

$$\det[J - \mu I] = 0$$



固有ベクトルを出発点として、変分方程式により次々と生成されてゆくベクトル列:

$$\xi(1) = \mu\xi(0), \quad \xi(2) = \mu\xi(1) = \mu^2\xi(0), \dots, \quad \xi(k) = \mu^k\xi(0)$$

一般解:

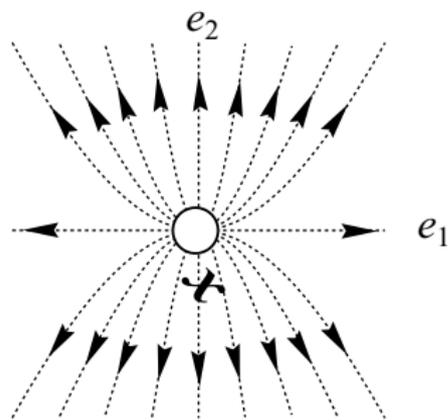
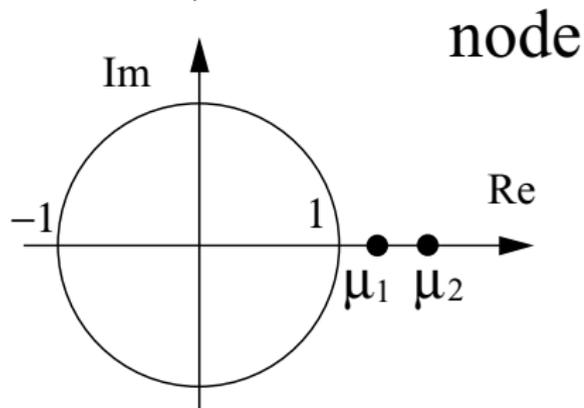
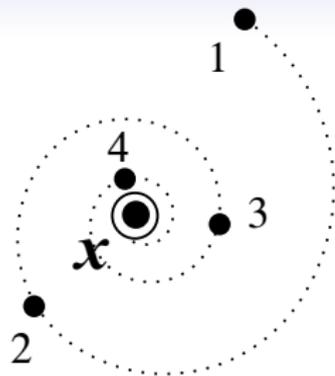
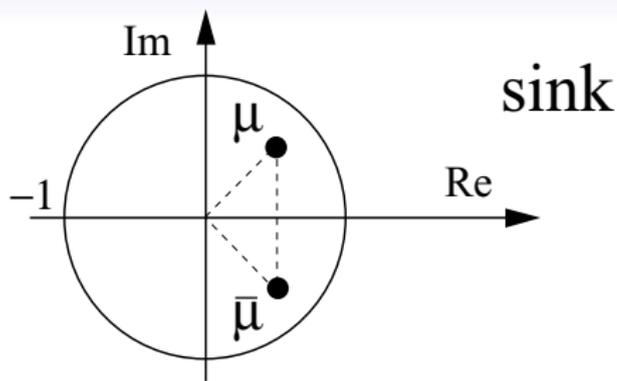
$$\xi(k) = \sum_{i=1}^n c_i \mu_i^k \xi_i(0) \quad (5)$$

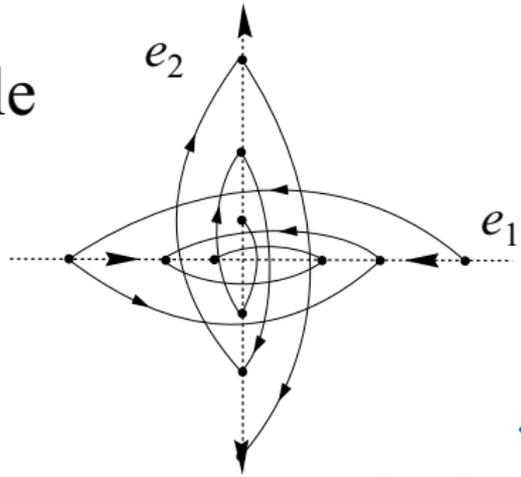
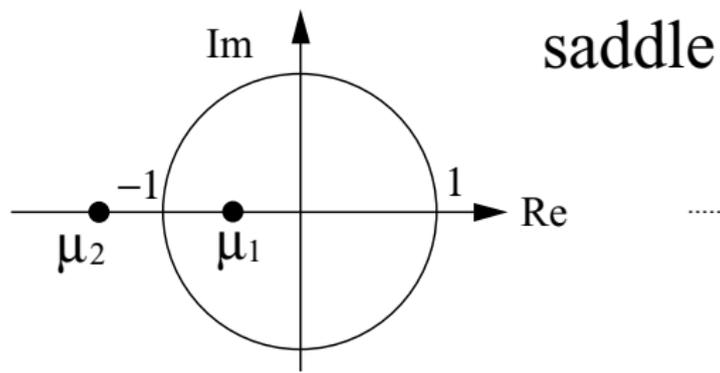
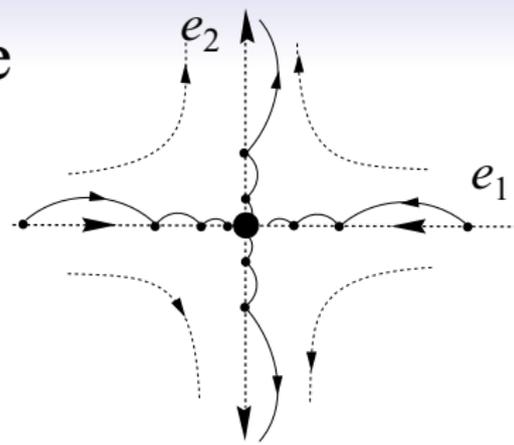
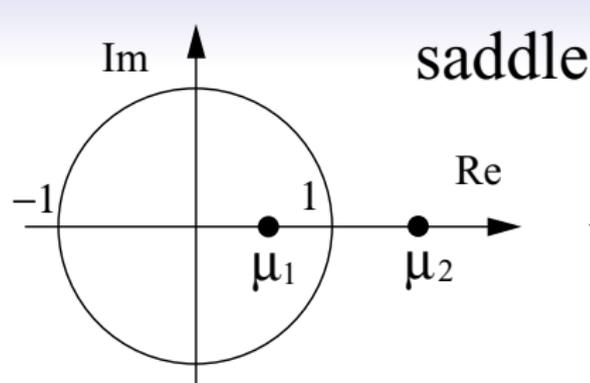
固定点安定である条件

$$\forall i; \quad |\mu_i| < 1$$

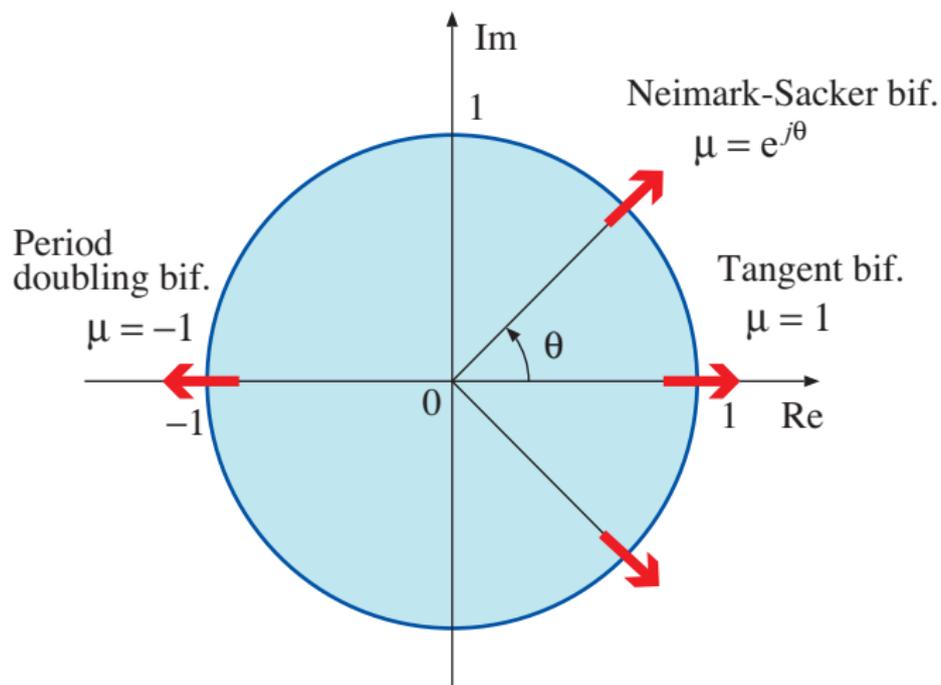
$\mu_i$  の取る値により固定点周りの位相的性質が異なる







分岐とは  $|\mu_i|$  が 1 を横切ることにより生じる。



# 分岐パラメータ値の計算

## 固定点条件 + 特性方程式

$$G = \begin{cases} T(x_0) - x_0 = 0 \\ \chi(\mu) = \det\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} - \mu I\right) = 0 \end{cases}$$

この  $n + 1$  次元連立方程式を  $\mu$  を指定し  $(x, \lambda)$  について解く.

- 解の  $\lambda$  に関する微分が必要となる.
- $\chi(\mu)$  は  $n$  次方程式になり, Newton 法に渡すためにはさらに  $x_0$  や  $\lambda$  で微分する必要がある.  $\Rightarrow$  第二変分方程式を求める必要がある



二次元系の場合の例： $x = (x_0, y_0, \lambda)$  とする。

$$\chi(\mu) = \mu^2 - \mu \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \right) + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} \right) = 0$$

Newton 法における Jacobi 行列:

$$G'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} - 1 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} - 1 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x_0} & \frac{\partial \chi}{\partial y_0} & \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x_0} &= -\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_0 \partial y_0} \right) \\ &+ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_0^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_0 \partial x_0} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_0 \partial x_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_0^2} \end{aligned}$$



# パラメータの変分, 高次変分

$\lambda$  に関する変分方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}$$

第二変分方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$$

これらを Runge-Kutta で  $t = 0$  から  $t = 2\pi$  まで積分してやればよい。



# 分岐パラメータ探索の戦略

1. 位相平面図より, 周期解に対応する Poincaré 写像の安定 (不安定) 固定点の近似値 (候補値) を求める.
2. 固定点を Newton 法で計算する. パラメータを変化させ, 固定点が求められなくなった点 (接線分岐), または固有値が分岐の条件 (周期倍分岐, Hopf 分岐) を満たす近似値を求める.
3. 近似値をもとに, 分岐パラメータを計算する.

この戦略に対応して計算機プログラムも普通 3 種類用意される.



# 例題: Duffing 方程式

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -ky - c_1x - c_3x^3 + B_0 + B \cos t$$

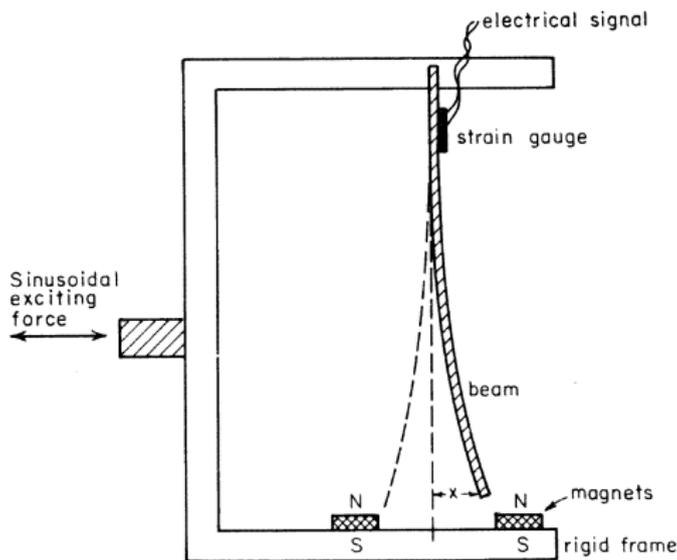


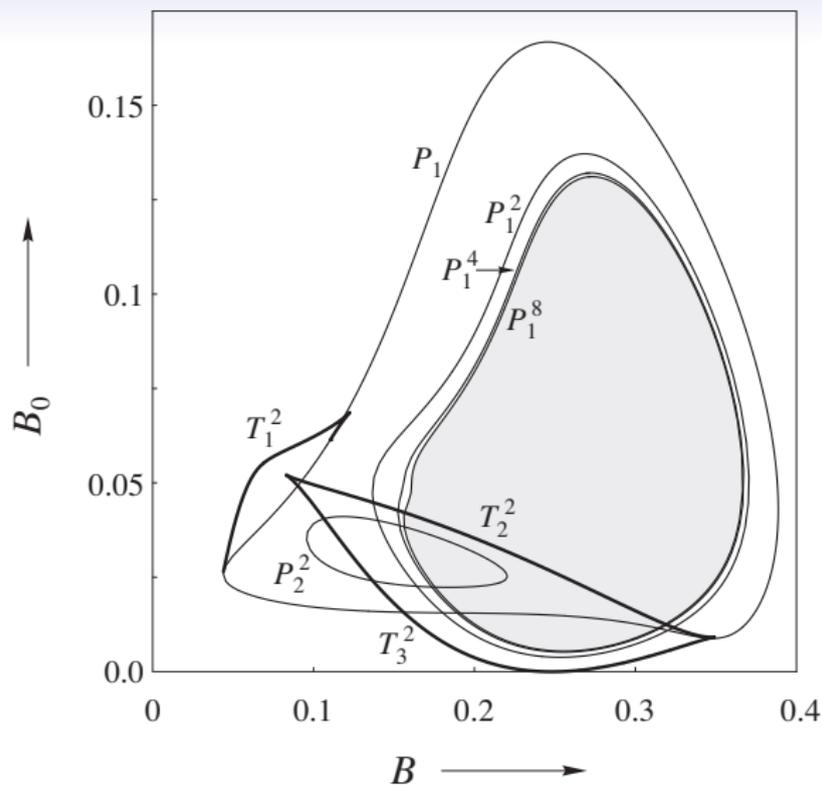
Figure 2.2.1. The magneto-elastic beam.



variables	sym.	equations	init.
$\varphi_1$	$x_1$	$\dot{x}_1 = x_2$	$x_0$
$\varphi_2$	$x_2$	$\dot{x}_2 = -kx_2 - c_1x_1 - c_3x_1^3 + B_0 + B \cos t$	$y_0$
$\partial\varphi_1/\partial x_0$	$x_3$	$\dot{x}_3 = x_4$	1
$\partial\varphi_2/\partial x_0$	$x_4$	$\dot{x}_4 = Px_3 - kx_4$	0
$\partial\varphi_1/\partial y_0$	$x_5$	$\dot{x}_5 = x_6$	0
$\partial\varphi_2/\partial y_0$	$x_6$	$\dot{x}_6 = Px_5 - kx_6$	1
$\partial\varphi_1/\partial B$	$x_7$	$\dot{x}_7 = x_8$	0
$\partial\varphi_2/\partial B$	$x_8$	$\dot{x}_8 = Px_7 - kx_8 + \cos t$	0
$\partial^2\varphi_1/\partial x_0^2$	$x_9$	$\dot{x}_9 = x_{10}$	0
$\partial^2\varphi_2/\partial x_0^2$	$x_{10}$	$\dot{x}_{10} = Px_9 - kx_{10} + Qx_3^2$	0
$\partial^2\varphi_1/\partial x_0\partial y_0$	$x_{11}$	$\dot{x}_{11} = x_{12}$	0
$\partial^2\varphi_2/\partial x_0\partial y_0$	$x_{12}$	$\dot{x}_{12} = Px_{11} - kx_{12} + Qx_3x_5$	0
$\partial^2\varphi_1/\partial y_0^2$	$x_{13}$	$\dot{x}_{13} = x_{14}$	0
$\partial^2\varphi_2/\partial y_0^2$	$x_{14}$	$\dot{x}_{14} = Px_{13} - kx_{14} + Qx_5^2$	0
$\partial^2\varphi_1/\partial x_0\partial B$	$x_{15}$	$\dot{x}_{15} = x_{16}$	0
$\partial^2\varphi_2/\partial x_0\partial B$	$x_{16}$	$\dot{x}_{16} = Px_{15} - kx_{16} + Qx_3x_7$	0
$\partial^2\varphi_1/\partial y_0\partial B$	$x_{17}$	$\dot{x}_{17} = x_{18}$	0
$\partial^2\varphi_2/\partial y_0\partial B$	$x_{18}$	$\dot{x}_{18} = Px_{17} - kx_{18} + Qx_5x_7$	0

$$P = -c_1 - 3c_3x_1^2, \quad Q = -6c_3x_1$$





Duffing 方程式の分岐図,  $k = 0.1$



# 局所的分岐まとめ

- 「局所的」とは…特異点周りの線形化空間で議論が可能であること
- 特異点の位相的性質が変わった後にみられる現象は、系の本来の非線形性に依存する
- 本発表では非自律系の周期解について述べたが、自律系の平衡点や周期点にも同様な議論が行える。



## 大域的分岐 (global bifurcation)

- 「大域的」…局所的分岐でない分岐
- **構造不安定**な集合が生じる, まさにそのパラメータ値
- 特異点は勿論関係しているが, 線形化領域以外での性質が本質的に関わる
- ホモクリニック (ヘテロクリニック) 軌道 (セパトリックス閉路, サドルコネクション), クライシスなど, サドル型特異点に関する多様体が重要な役割りを果たす



$n$ 次元自律系:  $t$  に関する陽な関数がない

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

2次元の例:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y)\end{aligned}$$

$f_1 = f_2 = 0$  が平衡点  $(x_0, y_0)$  を与える.

【注】: 非自律系の周期解は, Poincare写像により離散化したので,  $|\mu| < 1$  が安定条件. 自律系は  $\Re \mu < 0$  が安定条件.



# ホモクリニック (homoclinic) 軌道

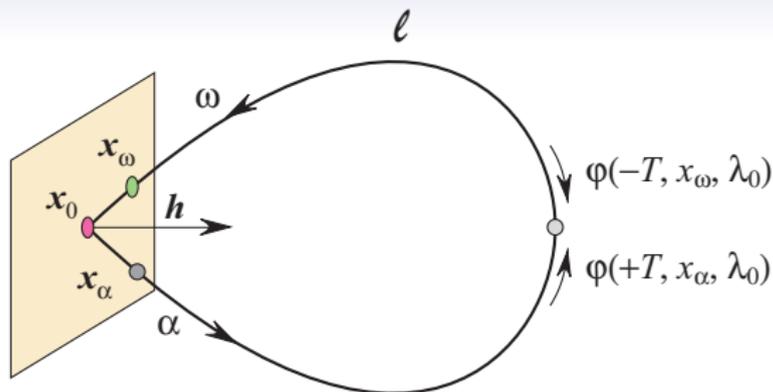
$x_0$  はサドル型平衡点 ( $\mu_1 > 0$  かつ  $\Re \mu_i < 0, i = 2, \dots, n$ ) とする.

$x_0$  に関する不安定多様体 ( $\alpha$ -枝) と安定多様体 ( $\omega$ -枝):

$$\alpha(x_0) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_0 \right\}$$

$$\omega(x_0) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \right\}$$





- $\ell = (\alpha(x_0) \cap \omega(x_0)) \cup x_0, \ell \neq x_0$
- $S$  は平衡点  $x_0$  の安定多様体に接する平面
- $h$  は  $S$  に横断的なベクトル

$$\begin{aligned} \exists x_\alpha \in \alpha(x_0), \quad \exists x_\omega \in \omega(x_0) \\ \exists T, \quad \varphi(T, x_\alpha, \lambda_0) - \varphi(-T, x_\omega, \lambda_0) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\alpha$  枝上の  $x_\alpha$  から出発する解と,  $\omega$  枝上の  $x_\omega$  から逆時間に出発した解がある時刻  $T$  で空間的に合致する



## 前準備

- $x_\alpha, x_\omega$  が十分  $x_0$  の近傍に来るよう  $T$  を選ぶ.
- $h_\alpha = x_\alpha - x_0, h_\omega = x_\omega - x_0$  とおく. ( $x_0$  まわりの線形領域における固有ベクトルに一致する)
- 定数  $\delta_1 \ll 1, \delta_2 \ll 1$  を適当に選ぶ.



# ホモクリニック軌道を Newton 法で解く

$$H = \begin{cases}
 f(x_0, \lambda_0) = \mathbf{0} & \text{平衡点条件} \\
 \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) - \mu I \right] h_\alpha = \mathbf{0} & \text{固有ベクトル条件} \\
 h_\alpha h_\alpha^t - \delta_1^2 = 0 & h_\alpha \text{ の規格化} \\
 \left[ \frac{\partial f^t}{\partial x}(x_0) - \mu^* I \right] h = \mathbf{0} & S \perp h \\
 h^t h - 1 = 0 & h \text{ の規格化} \\
 h^t h_\omega = 0 & h \perp h_\omega \\
 h_\omega^t h_\omega - \delta_2^2 = 0 & h_\omega \text{ の規格化} \\
 \varphi(T, x_\alpha, \lambda_0) - \varphi(-T, x_\omega, \lambda_0) = \mathbf{0} & \alpha, \omega \text{ 両枝が接合}
 \end{cases}$$

変数 :  $(x_0, x_\alpha, x_\omega, h, \lambda)$  など



**例題** 回転方向に線形復元力がかかる振り子 (線形化しないもの)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -ky - \sin x - cx + B_0$$

$t = 0$  で初期値  $(x_0, y_0)$  を出発する解を

$$x(t) = \varphi(t, x_0, y_0, \lambda), \quad y(t) = \psi(t, x_0, y_0, \lambda)$$

とする。平衡点  $O(x_0, y_0)$  における, Jacobi 行列は:

$$J(x_0, y_0, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_0 - c & -k \end{pmatrix}$$

特性方程式:

$$\mu^2 + k\mu + \cos x_0 + c = 0$$



- $O$  がサドルであるとき,  $\mu_\alpha > 0$ ,  $\mu_\omega < 0$  が 2 実根となり, それぞれに対応する固有ベクトルが決まる
- $\alpha$  枝上の点で,  $O_0$  から  $\delta$  だけ離れている初期値を  $(x_\alpha, y_\alpha)$ , 同様に  $\omega$  枝上の点で,  $O_1$  から  $\delta$  だけ離れている初期値を  $(x_\omega, y_\omega)$  とする. **これらを固有ベクトル上に乗せる**
- 2次元自律系の場合は  $h$  とそれに直交する空間  $S$  を考える必要がなく, 簡単である.



条件を式にまとめると以下となる:

$$f_0: \sin x_0 + cx_0 - B_0 = 0$$

$$f_1: \sin x_1 + cx_1 - B_0 = 0$$

$$f_2: 2\mu_\alpha + k - \sqrt{k^2 - 4(\cos x_0 + c)} = 0$$

$$f_3: 2\mu_\omega + k + \sqrt{k^2 - 4(\cos x_1 + c)} = 0$$

$$f_4: (f_x - \mu_\alpha)(x_\alpha - x_0) + f_y y_\alpha = 0$$

$$f_5: (f_x - \mu_\omega)(x_\omega - x_1) + f_y y_\omega = 0$$

$$f_6: (x_\alpha - x_0)^2 + y_\alpha^2 = \delta^2$$

$$f_7: (x_\omega - x_1)^2 + y_\omega^2 = \delta^2$$

$$f_8: \varphi(\tau, x_\alpha, y_\alpha, \lambda) - \varphi(-\tau, x_\omega, y_\omega, \lambda) = 0$$

$$f_9: \psi(\tau, x_\alpha, y_\alpha, \lambda) - \psi(-\tau, x_\omega, y_\omega, \lambda) = 0$$

未知変数  $(x_0, x_1, \mu_\alpha, \mu_\omega, x_\alpha, y_\alpha, x_\omega, y_\omega, \tau, \lambda)$  について解く



Jacobi 行列  $H'(10 \times 10)$  の各要素は…

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0} = \cos x_0 + c$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mu_\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mu_\omega} = 0$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_\omega} = 0$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial y_\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial y_\omega} = 0$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial k} = 0$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial k} = (\cos x_0 + c) \frac{dx_0}{dB_0} - 1$$

⋮

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_0} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \cos x_1 + c$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mu_\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mu_\omega} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_\omega} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_\omega} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial k} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial B_0} = (\cos x_1 + c) \frac{dx_1}{dB_0} - 1$$



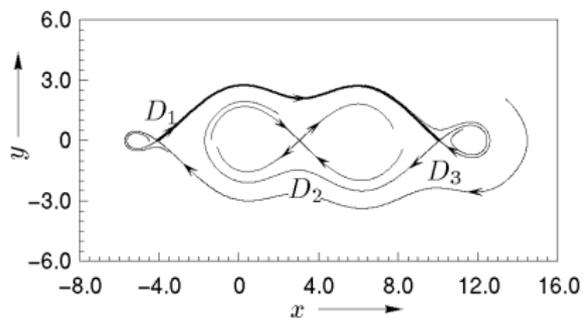
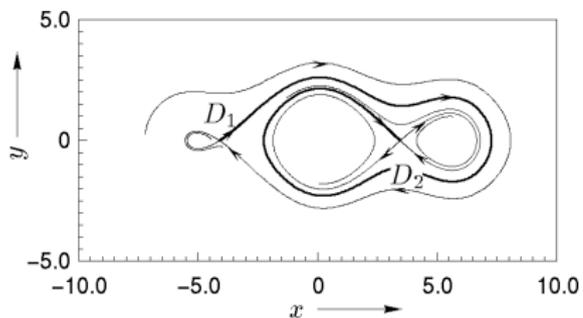
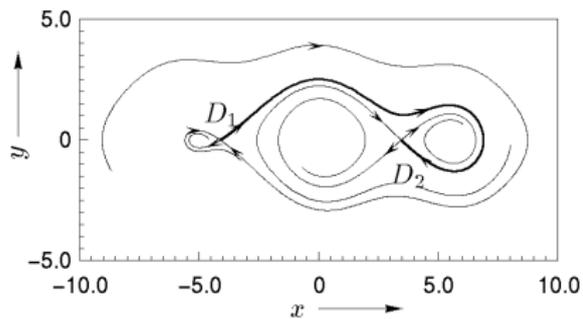
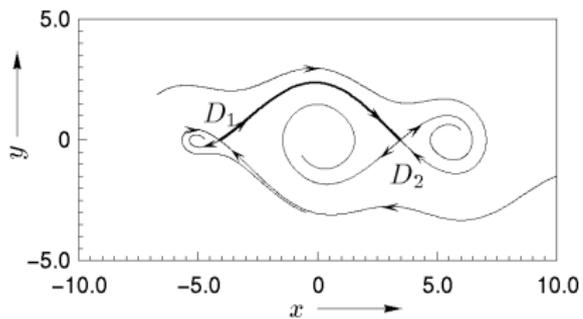
$$\begin{aligned}
 & \vdots \\
 \partial f_9 / \partial x_0 &= 0 \\
 \partial f_9 / \partial x_1 &= 0 \\
 \partial f_9 / \partial \mu_\alpha &= 0 \\
 \partial f_9 / \partial \mu_\omega &= 0 \\
 \partial f_9 / \partial x_\alpha &= \partial \psi / \partial x_\alpha(\tau) \\
 \partial f_9 / \partial y_\alpha &= \partial \psi / \partial y_\alpha(\tau) \\
 \partial f_9 / \partial x_\omega &= \partial \psi / \partial x_\omega(-\tau) \\
 \partial f_9 / \partial y_\omega &= \partial \psi / \partial y_\omega(-\tau) \\
 \partial f_9 / \partial \tau &= -k\psi(\tau) - \sin \varphi(\tau) - c\varphi(\tau) + B_0 \\
 & \quad -k\psi(-\tau) - \sin \varphi(-\tau) - c\varphi(-\tau) + B_0 \\
 \partial f_9 / \partial \lambda &= \partial \psi / \partial \lambda(\tau) - \partial \psi / \partial \lambda(-\tau)
 \end{aligned}$$

ただし,

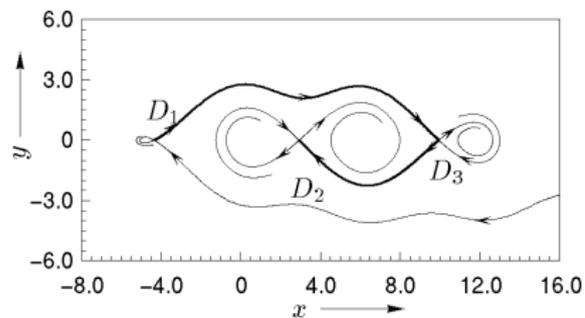
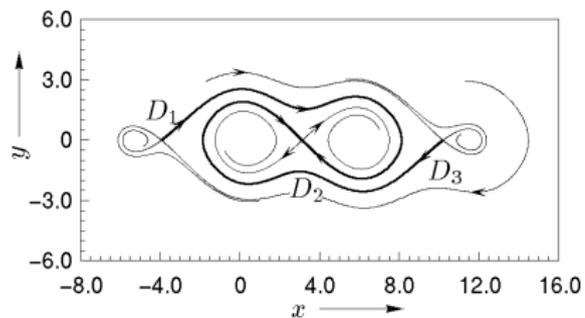
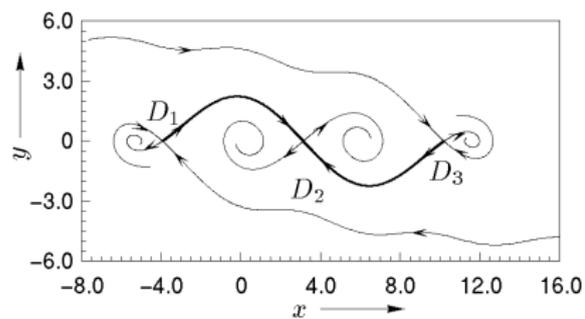
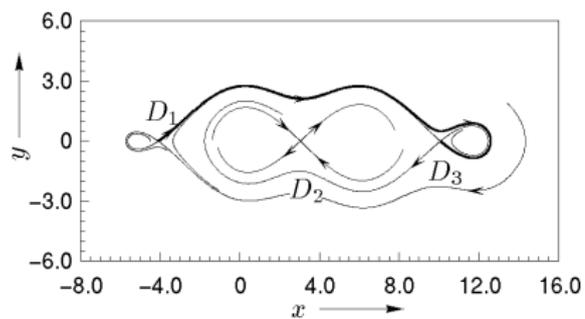
$$\begin{aligned}
 \frac{dx_0}{dB_0} &= \frac{1}{\cos x_0 + c} & \frac{dx_1}{dB_0} &= \frac{1}{\cos x_1 + c} \\
 \frac{d\mu_\alpha}{dk} &= -\frac{\mu_\alpha}{2\mu_\alpha + k} & \frac{d\mu_\omega}{dk} &= -\frac{\mu_\omega}{2\mu_\omega + k} \\
 \frac{d\mu_\alpha}{dB_0} &= \frac{\sin x_0}{(\cos x_0 + c)(2\mu_\alpha + k)} & \frac{d\mu_\omega}{dB_0} &= \frac{\sin x_1}{(\cos x_1 + c)(2\mu_\omega + k)}
 \end{aligned}$$

である.

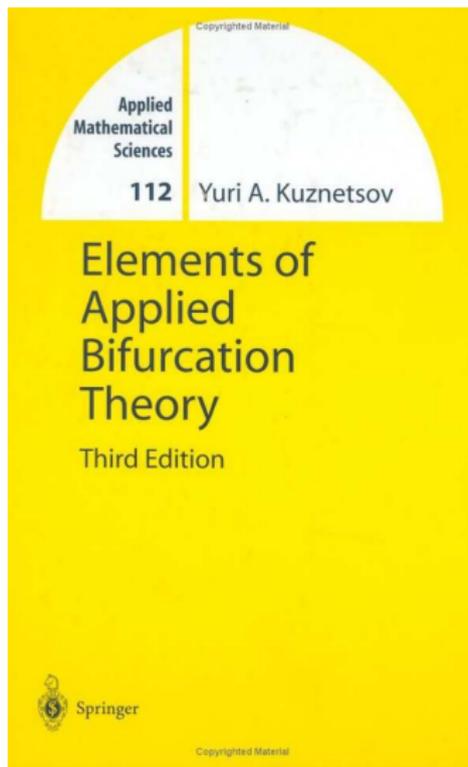




## 計算結果例 2/2



# 注意すべき参考書



# 注意すべきユーティリティ

- AUTO, HomCont, written by Doedel
- MATCONT Dhooge, Kuznetsov
- WEBCONT
- われわれのは, 鋭意開発中… ERATO プロジェクトの一部

