

2次元非自律系における周期解の分岐パラメータ*

上田 哲史[†], 川上 博[‡]

1 はじめに

常微分方程式で記述される力学系にみられる周期解が、式のパラメータによって軌道の位相的性質を変える現象を**分岐現象**といい、それら周期解の位相的構造を知るために、パラメータ空間での**分岐図**を得ることは本質的に重要である。

しかし、昔はこの図の作成にかなりの困難を強いられたそうである。分岐点を位相平面でまず見つけ、そこから微小にパラメータを変えて分岐曲線をトレースしてゆくという試行錯誤の繰り返しであった。

現在は、以下に述べる系統だった解析方法が確立されている [4] [1]。対象となる方程式と変分方程式さえ修正し、適切な初期値を投入すれば、コンピュータが自動的に分岐図を作成してくれる。最近ではコンピュータの性能も上ったので、昔で1年がかりだった仕事も、今では数時間のオーダーで仕上がる。まさに CAE(Computer Aided Engineering) の醍醐味である。

ところで、コンピュータが勝手にトレースしてくれると言っても、その原理の理解なしでは、プログラムに与えるべきデータも見当が付かないし、出てきた結果に対しても十分な説明はできないのではないだろうか。また、アルゴリズムの拡張も容易ではないであろう。

さて、本稿では2次元非自律系を例にとり、分岐曲線のシューティングアルゴリズムをまとめてみた。学術論文では implicit だった部分を特に分かりやすく書いてあるつもりである。中核となる数値計算も、Runge-Kutta 法と Newton 法だけであり、初等的な数値計算法の関する本の内容で十分カバーできる。そこで、多少時間がかかってもよいので、ぜひ原理を理解し、コーディング内容を検討する訓練をしてほしい。その経験が、後の非線形現象解析の助けになると確信している。

2 問題の記述

時間に対して周期的な解を持つ、2階の非自律形微分方程式、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(x, \frac{dx}{dt}, \lambda\right) \frac{dx}{dt} + g(x, \lambda) = e(t, \lambda) \quad (1)$$

*本記事は文献 [3] をもとに再構成したものである。

[†]徳島大学理工学研究部 ueta@tokushima-u.ac.jp

[‡]徳島大学名誉教授

を考える。ここで $x \in \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}^m$ として, f, g, e は必要な限り微分が可能とする。 $e(t, \lambda)$ は時間 t に対して周期 2π の周期関数とする。正規形に書き直すと,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y & &= f_1(t, x, y, \lambda) \\ \frac{dy}{dt} &= -f(x, y, \lambda)y - g(x, \lambda) + e(t, \lambda) & &= f_2(t, x, y, \lambda) \end{aligned} \quad (2)$$

となる。

3 平衡点解析

2 階の常微分方程式の正規形は次の式で記述される:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

いま, この系 (3) が非線形常微分方程式で記述されていたとする。式 (3) の右辺に, 時間関数がない場合を自律系という。時間微分の項を 0 とおいた方程式:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0 \\ f_2(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

は, 系 (3) の平衡点の座標を与える。もし平衡点が安定であれば, その近傍を初期値とする解軌道は, 過渡応答が終った後にその点に落ち着くであろう。

この平衡点がどのような性質を持つかを調べるには, **平衡点の安定性**に着目すればよい。すなわち, 平衡点の近傍において, 平衡点の近傍を初期値とする軌道が, 平衡点に対してどう振舞うかを調べる。時間の発展に応じて, 軌道が平衡点に漸近していけば, その平衡点は安定だといえるだろう。この安定性の判別は, 式 (3) を Taylor 展開したとき, その 1 次の項の係数行列である **Jacobi 行列**の固有値を求める問題に帰着される。第 6 節を参照。

さて, 系 (3) に周期外力が加わった場合, すなわち系 (2) を考えよう。実際に Runge-Kutta などの数値積分を用いて軌道を描かしてみよう。系のパラメータを, できるだけ線形に近い状態にしておき, 任意の初期値から出発した解が, 過渡応答を終え, 安定平衡点に落ち着いている状態にセットする。この状態で正弦波を入力し, その振幅を徐々に大きくすると, 安定平衡点まわりに周期解が発生する。この周期解は外力の周期に同期した軌道を描くであろう。このとき, 系 (3) の右辺には時間関数があり, 非自律系となる。

つぎに系のパラメータを徐々に変えていくと, 解軌道が突如大きい振幅の軌道に変化することがある。また, 軌道が 2 重にダブリはじめたり, **カオス**状態と呼ばれる複雑な振動が見られたりと, さまざまな奇妙な現象が生じる。これらの現象を, 周期解の分岐現象という。以下では, 周期外力の持つ性質を利用して, 方程式を解析の容易な形に変換する写像を考える。

4 Poincaré 写像と固定点

次の写像を考えよう。 $t = 0$ で相平面上の任意の (x_0, y_0) を通る式 (2) の解を

$$\begin{aligned}x(t) &= \varphi_1(t, x_0, y_0, \lambda) \\y(t) &= \varphi_2(t, x_0, y_0, \lambda)\end{aligned}\tag{5}$$

とする。これに対して次の連続可微分写像を定義する。

$$\begin{aligned}T_\lambda: \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\(x_0, y_0) &\longmapsto (x_1, y_1) = T_\lambda(x_0, y_0) = (\varphi_1(2\pi, x_0, y_0, \lambda), \varphi_2(2\pi, x_0, y_0, \lambda))\end{aligned}\tag{6}$$

つまり初期値 (x_0, y_0) から 2π おきに、解の相平面上の位置をサンプリングした点列を考えていることになる：

$$(x_0, y_0), T_\lambda(x_0, y_0), T_\lambda^2(x_0, y_0), \dots, T_\lambda^n(x_0, y_0), \dots\tag{7}$$

この T_λ を Poincaré 写像という。点列 (7) は、解の $t \in (0, 2\pi)$ 区間の情報を無視するのであるから、直感的に解析が簡単になりそうだと思うだろう。

さて、写像 (6) は時間の離散化を意味しているので、前述の数値シミュレーションにおいては、軌道は点列に置き換えられている。たとえば、周期 2π の等速円運動を行なっている解軌道は、この写像によって、相平面上では一点に変換されることは容易に分かる。この点を固定点 (fixed point)¹ という。周期が $2m\pi$ であるときは、相平面には m 個の点が見つかるに違いない。これを m -周期点 (m -periodic point) という。このような解は $1/m$ 分数調波解という。

いま、相平面上の点 $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^t \in \mathbf{R}^2$ を T_λ の固定点としよう。そのとき、

$$T_\lambda(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 = 0\tag{8}$$

すなわち、

$$\begin{aligned}\varphi_1(2\pi, x_0, y_0, \lambda) - x_0 &= 0 \\ \varphi_2(2\pi, x_0, y_0, \lambda) - y_0 &= 0\end{aligned}\tag{9}$$

が成り立つ。

さて、われわれの議論は、式 (2) の連続系から、式 (6) の離散系に変換されたので、解析すべき対象が微分方程式 (Differential Equation) から差分方程式 (Difference Equation) に変わったことに注意しなければならない。

¹固定点は不動点とも呼ばれている。つい 10 年ぐらい前までは、不動点一点張りであったが、近年は固定点を使う頻度が増えてきた。いずれも fixed point の訳である

5 固定点の追跡

いま、パラメータは一定値に定めておく。したがって、以下の式では変数 λ を省略する²。固定点の
だいたい位置は、数値シミュレーションによって容易に得られる。このデータから任意の精度の正確
な位置がいま、知りたいとしよう。それには Newton 法を用いる。

Newton 方のアルゴリズムを簡単に復習する。 $F(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ とすると、関数 $F(\mathbf{x})$ の、第 k 近似
 $\mathbf{x}^{(k)}$ まわりの Taylor 展開は、

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^{(k)}) + F'(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) + \dots \quad (10)$$

で表される。ここで $F'(\mathbf{x}^{(k)}) = (\partial f_i / \partial x_j)$ は Jacobi 行列である。近似値の修正量 $\mathbf{h} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$ は
次の式で与えられる。

$$F'(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{h} = -F(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (11)$$

Newton 法は二次収束であり、かなりよい第 k 近似 $\mathbf{x}^{(k)}$ を与えたら、数回の反復で精度の良い近似解が
得られる仕組みになっている。

さて、Poincaré 写像の方程式 (8) の固定点の近似値を $\mathbf{x}_0^{(k)}$ とする。いま、

$$F(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 - T(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (12)$$

としたとき、第 $k+1$ 次の近似解を得るアルゴリズムは次のとおり。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0^{(k+1)} &= \mathbf{x}_0^{(k)} + \mathbf{h} \\ F'(\mathbf{x}_0^{(k)})\mathbf{h} &= -F(\mathbf{x}_0^{(k)}) \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 $F'(\mathbf{x}_0^{(k)})$ は初期値 \mathbf{x}_0 に関する微分による第 k 次の Jacobi 行列 (2×2) で、

$$F'(\mathbf{x}_0^{(k)}) = I - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0^{(k)}) \quad (14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0}(2\pi, x_0^{(k)}, y_0^{(k)}) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0}(2\pi, x_0^{(k)}, y_0^{(k)}) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0}(2\pi, x_0^{(k)}, y_0^{(k)}) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0}(2\pi, x_0^{(k)}, y_0^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (15)$$

となる。ただし、 I は (2×2) の単位行列である。式 (13) の第 2 式は、 \mathbf{h} について、Gauss の掃き出し法
などで解かなくてはならない。 $F(\mathbf{x}_0^{(k)})$ は関数値そのものを与えるとよいが、問題は、式 (15) の Jacobi
行列の要素 (偏微分の値!) をどうやって求めるかである。

ちよつと元にもどって考えてみよう。式 (2) を書き直す:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \quad (16)$$

²これからも誤解がでない範囲内で記号の省略をおこなう。

ただし、 $\mathbf{x} = (x, y)^t$, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = (f_1(t, \mathbf{x}), f_2(t, \mathbf{x}))^t$ とする。 $(\varphi_1, \varphi_2)^t = \boldsymbol{\varphi}$ としたとき、初期値 \mathbf{x}_0 から出発する式 (16) の解を

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}_0) \tag{17}$$

としよう。この解を式 (16) に代入すると、

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}_0)). \tag{18}$$

この式を \mathbf{x}_0 で微分する。すると、

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \left(\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}(t, \mathbf{x}_0) \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} (\mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}_0))) \tag{19}$$

左辺の微分の順序は変更できる。右辺も計算すると、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_0}(t, \mathbf{x}_0) \right) = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}_0)) \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_0}(t, \mathbf{x}_0). \tag{20}$$

この式は、わかりやすく書き換えると、

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} X \tag{21}$$

となる。つまり $X = \partial \boldsymbol{\varphi} / \partial \mathbf{x}_0$ は線形行列微分方程式³の基本行列解⁴となっている。この式 (20) は式 (16) の変分方程式といわれる。

ところで

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_0}(0, \mathbf{x}_0) = I \tag{22}$$

である。 I は $(n \times n)$ の単位行列である。式 (22) を初期値として、式 (20) を時刻 $t = 0$ から 2π まで数値積分すれば、式 (15) を求めることができ、Newton 法によって精密な固定点の位置 \mathbf{x}_0 が求められる。また m -周期点が求めたい場合は積分を $2m\pi$ まで実行すればよい。

6 差分方程式の Jacobi 行列とその固有値

この固定点 \mathbf{x}_0 の位相的性質 (安定性) は、前節で求めた式 (8) の初期値に対する Jacobi 行列、

$$\frac{\partial T(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0}(2\pi, x_0, y_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0}(2\pi, x_0, y_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0}(2\pi, x_0, y_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0}(2\pi, x_0, y_0) \end{bmatrix} \tag{23}$$

の固有値で特徴づけられる。

³係数行列 $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$ は、状態変数 \mathbf{x} 、時間 t の非線形関数となりうるので、線形というと面くらうかもしれない。しかし、いま問題なのは X のダイナミクスであり、なんら状態変数に関与していない、という意味で線形である。

⁴この場合、レゾルベントという名前がついている。

この説明の前準備をしよう。式 (8) は離散系になっている。離散系の一般的な方程式は、状態 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ に関して、

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}) \quad (24)$$

という差分方程式で与えられる。 \boldsymbol{f} の固定点 \boldsymbol{x}_0 が見つかったとき、

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \quad (25)$$

となることがわかる。

ところで、連続時間の自律系の場合を復習すると [2]、

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad (26)$$

の平衡点を \boldsymbol{x}^* とする。平衡点近傍 $\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{\xi}$ において Taylor 展開を実行すると、

$$\frac{d(\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{\xi})}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) + \left. \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{\xi} + \dots \quad (27)$$

この式と式 (26) との差を取ると、 $\boldsymbol{\xi}$ に関する変分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \left. \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{\xi} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \boldsymbol{\xi} \equiv \boldsymbol{J} \boldsymbol{\xi} \quad (28)$$

が得られる。この $\boldsymbol{J}(n \times n)$ の固有値 μ の値によって平衡点の安定性を判別できたことを思いだそう⁵。つまり、 $\boldsymbol{\xi}$ についての一般解は次式で表される。

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{k=1}^n c_k e^{\mu_k t} \boldsymbol{\xi}_k \quad (29)$$

ここで c_k は定数、 $\boldsymbol{\xi}_k$ は固有ベクトルを示している。この式で例えば、固有値の全てが負の実部を持っていると、その平衡点が安定なのは一目瞭然であろう⁶。したがって連続時間自律系において、ある平衡点での Jacobi 行列の固有値は、その平衡点の安定性の指数となっていた。この固有値と同様な、離散系における指標は何であろうか。

元に戻って、離散系システムの固定点は、連続系の平衡点に対応すると考えられる。すなわち、式 (25) は連続系 (3) の、

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (30)$$

に対応している。ともに定常状態に落ち着いていると思えばよい。

式 (25) について一次の変分方程式をたてよう。いま、固定点近傍について $\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\xi}^{(k)}$ として

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\xi}^{(k+1)} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\xi}^{(k)}). \quad (31)$$

⁵力学系がもともと $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ で表される線形系では、直接 \boldsymbol{A} の固有値を調査することによって、解の大域的な挙動まで分かってしまう

⁶ここでの‘安定’とは、あくまで平衡点の性質を言っているのであり、方程式 (26) の解の大域的な挙動を言っているのではない

この式に対して Taylor 展開を施すと,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\xi}^{(k)} + \dots \quad (32)$$

となる. 2次以降を無視し, 式(25)との差を取ると, 線形差分方程式,

$$\boldsymbol{\xi}^{(k+1)} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\xi}^{(k)} \equiv \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \boldsymbol{\xi}^{(k)} \equiv J \boldsymbol{\xi}^{(k)} \quad (33)$$

が得られる. ここで J は $(n \times n)$ の Jacobi 行列となる.

さて,

$$(J - \mu I) \boldsymbol{\xi}^{(0)} = 0 \quad (34)$$

が成り立つゼロでない解 $\boldsymbol{\xi}^{(0)}$ が存在するとき, μ を差分方程式(33)の固有値という. また, $\boldsymbol{\xi}^{(0)}$ を, 固有値 μ に対応する固有ベクトルという. 固有値は特性方程式,

$$\det[J - \mu I] = 0 \quad (35)$$

で求められ, 固有ベクトルは式(34)を直接計算すると求められる.

固有ベクトルを出発点として, 方程式(33)で次々と生成されてゆくベクトル列は,

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mu \boldsymbol{\xi}^{(0)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \mu \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mu^2 \boldsymbol{\xi}^{(0)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(k)} = \mu^k \boldsymbol{\xi}^{(0)} \quad (36)$$

となる. この差分方程式の一般解は,

$$\boldsymbol{\xi}^{(k)} = \sum_{i=1}^n c_i \mu_i^k \boldsymbol{\xi}^{(0,i)} \quad (37)$$

で表すことができる. ここで c_i は定数, $\boldsymbol{\xi}^{(0,i)}$ は固有値 μ_i に対応した固有ベクトルである.

式(37)はある大きさの固有ベクトルに, あるスカラー値 μ_i を k 回かけていくことになる. そこで, ベクトル $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$ の長さが発散しないためには

$$|\mu_i| < 1 \quad (38)$$

を要することがわかる.

さて, もとの Poincaré 写像によって次々と生成されてゆくベクトル列は, 式(36)に似た形の式になっていると気がつくだろう:

$$\mathbf{x}^{(1)} = T(\mathbf{x}^{(0)}), \mathbf{x}^{(2)} = T(\mathbf{x}^{(1)}), \dots, \mathbf{x}^{(k+1)} = T(\mathbf{x}^{(k)}), \dots \quad (39)$$

したがって, 式(6)の特性方程式

$$\det \left[\frac{\partial T(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} - \mu I \right] = 0 \quad (40)$$

の固有値, μ_1, μ_2 によって, 固定点 \mathbf{x}_0 の安定性が議論できる. 2次元力学系における固定点の分類は, ここでは簡単に次表にまとめる.

表 1: 固定点の分類

名称	条件	記号
完全安定固定点	$ \mu_1 < 1, \mu_2 < 1$	S
完全不安定固定点	$ \mu_1 > 1, \mu_2 > 1$	U
正不安定固定点	$0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$	D
逆不安定固定点	$\mu_1 < -1 < \mu_2 < 0$	I

一つの固定点には2つの方向の固有ベクトルが対応する。例えば、正不安定固定点なら流入、流出の2方向のベクトルになっている。これを鞍型点 (saddle point) という。また、逆不安定固定点は、写像の度に反対方向に点列が反転していく (マイナスの値を繰り返しかけるから) 鞍型点になっている。

さて、以上の予備知識をもとに、固定点を任意のパラメータにおいて求めることができるようになった。

7 パラメータ平面上での分岐曲線の追跡

式 (2) をコンピュータで数値積分⁷させて、Poincaré 写像によって、それが写される固定点の様子を見てみる。周期外力を適当に設定して1周期解を得ていることにしよう。

いま、パラメータ $\lambda \in \mathbf{R}^m$ のうち、 $(m-1)$ 個の成分は固定し、残り1つの $\lambda \in \mathbf{R}$ をオンラインで変化させているとしよう⁸。すると、さまざまな点列の性質の変化が観測されるに違いない。これらは固定点の分岐現象と呼ばれる。固定点の分岐は、以下の3つの条件で起こる。

1. 接線分岐:固有値の1つが1になる。

あるパラメータで突然、一つの固定点が別の位置にジャンプする。(jump phenomenon)。つまり軌道がそのパラメータで大きく形状を変える。パラメータを逆方向に徐々に戻しても、ジャンプした固定点は、すぐには元の位置に戻らないヒステリシス現象 (histerisis phenomenon) を示す。前節で説明した固定点追跡法では、この現象の近傍で式 (14) が非正則となるため、Newton 法がストップしてしまうであろう。

2. 周期倍分岐:固有値の1つが-1になる。

この分岐はあるパラメータで固定点が2点に分かれる (period doubling)。解軌道は、二重にだぶったように見える閉曲線として観察される。これは新たに安定な固定点が2つ生まれ、変化前の安定な固定点は、変化後に鞍型点となっている。固定点が2つになったのではなく、3つになったことに注意。

3. Neimark-Sacker 分岐:2つの固有値が複素共役となり、単位円を横切る。

この分岐では、ある安定な固定点が突然不安定化し、その周りに準周期解による不変閉曲線が現れる。この分岐が現れない系もあらかじめ知ることができる (後述)。

⁷そのシミュレーション値が信用できるものかどうかは、チェックする必要がある。

⁸変化させたときのシステムの初期値は、変化させる前の固定点の位置にしておくとお観察しやすい。

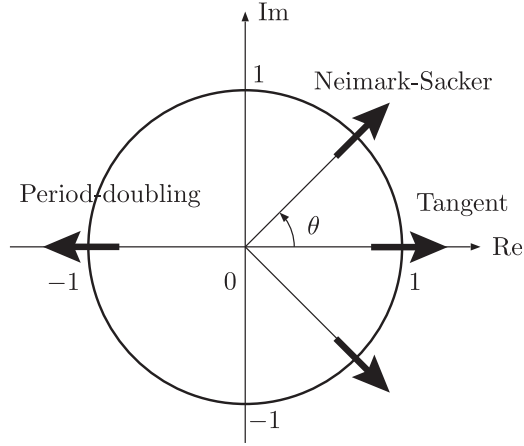


図 1: 分岐の種類と特性乗数の関係

さて、これらの分岐曲線を得たいとしよう。上述のどの分岐においても、以下の解析方法は同じである。固定点の性質は、あらかじめ固有値として与えることができるので、次の連立方程式を解けば分岐点の精密な位置が分かる。

$$\begin{aligned}
 f_1(x_0, y_0, \lambda) - x_0 &= 0 \\
 f_2(x_0, y_0, \lambda) - y_0 &= 0 \\
 g(x_0, y_0, \lambda) &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0}(2\pi, x_0, y_0, \lambda) - \mu & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0}(2\pi, x_0, y_0, \lambda) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0}(2\pi, x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0}(2\pi, x_0, y_0, \lambda) - \mu \end{bmatrix} = 0
 \end{aligned} \tag{41}$$

この式 (41) の第 1,2 式は固定点である条件、第 3 式は指定された固有値に対して特性方程式の値がゼロになる条件、言い替えると、ゼロでない固有ベクトルがある条件を表している。

$F \in \mathbf{R}^3$ として、連立方程式を次の式でまとめる。

$$F(x_0, y_0, \lambda) = (f_1(x_0, y_0, \lambda), f_2(x_0, y_0, \lambda), g(x_0, y_0, \lambda))^t \tag{42}$$

ここで $g(x_0, y_0, \lambda)$ において、簡単に行列式が展開できる：

$$g(x_0, y_0, \lambda) = \mu^2 - \mu \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} \right) = 0 \tag{43}$$

分岐点のシューティングアルゴリズムとしては、前節と同様に Newton 法を用いる。式 (13) を再掲する。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{h} \\
 F'(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{h} &= -F(\mathbf{x}^{(k)})
 \end{aligned} \tag{44}$$

ここで $\mathbf{x} = (x_0, y_0, \lambda)^t$ となっている。この k 次近似における Jacobi 行列は、

$$F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1}{\partial y_0} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_0} & \frac{\partial f_2}{\partial y_0} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial g}{\partial x_0} & \frac{\partial g}{\partial y_0} & \frac{\partial g}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} - 1 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} - 1 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} \\ a & b & c \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$a = -\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_0 \partial y_0} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_0^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_0 \partial x_0} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_0 \partial x_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_0^2} \quad (46)$$

$$b = -\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_0 \partial y_0} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_0^2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_0 \partial y_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_0^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_0 \partial y_0} \quad (47)$$

$$c = -\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_0 \partial \lambda} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_0 \partial \lambda} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_0 \partial \lambda} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_0 \partial \lambda} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_0 \partial \lambda} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_0 \partial \lambda} \quad (48)$$

となる。ここで $\partial \varphi_i / \partial x_0$ や $\partial \varphi_i / \partial y_0$ は、固定点追跡に出てきた変分方程式の解を用いればよいと分かるだろう。すると残りの $\partial \varphi_i / \partial \lambda$ や、2階偏微分のはどうやって生成すればよいのだろうか。

まず、パラメータによる微分 $\partial \varphi_i / \partial \lambda$ は、式 (16) について、パラメータを含めた解を、

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, \mathbf{x}_0, \lambda) \quad (49)$$

とすると、この式のパラメータ λ についての微分は、

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \quad (50)$$

となる。これを式 (16) に代入することにより、線形な微分方程式、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \lambda} \quad (51)$$

を得る⁹。これについて、前節のように $t = 2\pi$ での値を数値的に解いてやればよい。

次に、二階の変数については、方程式 (20) をさらに \mathbf{x}_0 について微分したものを考えるとよい:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{x}_0^2} \right) = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{x}_0^2} \right) + \underline{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_0}}. \quad (52)$$

もちろん、式中の $\partial \varphi / \partial \mathbf{x}_0$ や $d\mathbf{f} / d\mathbf{x}$ は式 (21) を流用する。下線部はテンソル積となって複雑である。

⁹これらはパラメータ λ についての微分であるため、解は基本行列解にはならず、ベクトル解となっていることに注意が必要である。式 (51) をパラメータに関する変分方程式という

この式を第2変分方程式という。付録に第1,第2変分方程式についてまとめた。

さて、この式(52)も同じく、 $t = 2\pi$ での値を数値的に求めることができると、Jacobi行列の要素が全て決定できるので、分岐点の精密な位置が算出できる。

7.1 接線分岐と周期倍分岐

これらの分岐では、ともに特性乗数を実数となるため、式(43)に直接特性乗数を代入してやればよい。

7.2 Neimark-Sacker 分岐

この分岐では、共役な特性根が単位円上に乗る条件を考える。

8 まとめ

分岐パラメータ探索の戦略は、次のようにまとめられる。

1. 位相平面図より、周期解に対応するPoincaré写像の安定、または不安定点固定点の近似値を求める。
2. 固定点をNewton法で計算する。パラメータを変化させ、固定点が求められなくなった点(接線分岐)、または固有値が分岐の条件(周期倍分岐、Neimark-Sacker分岐)を満たす近似値を求める。
3. 2.の近似値をもとに、分岐パラメータを計算する。

このストラテジに対して、計算機プログラムも普通3つ用意される。ところで、前述のように、接線分岐では、固定点追跡に用いたJacobi行列がsingularになり、分岐点の精密な近似解を与えることができない。そこで次の原則を採用する。

singularな問題の解に関する近似解を求めるには、non-singularな問題をまず解き、パラメータを変化させ、このnon-singularな問題が解けなくなった点をこの近似解とみなす

つまり、singularな点にできるだけ近い点のデータを与え、後は式(44)のアルゴリズムにsingularな点の精密な近似解の計算をゆだねる¹⁰とよい。

これらのプログラムを用いて最終的に、周期解の分岐パラメータ曲線を得ることができ、それから問題の系の性質を説明することができよう。

分岐曲線を二次元的に追うときは、次の手順をとる。

- 一方のパラメータは、変分方程式を解く専用とする。
- 他方のパラメータは、固定値からスタートし、分岐点があれば、次の分岐点のために細かい刻みでユーザが変化させる。ここでユーザが変化させるパラメータの変化後における分岐点は、それまでに求めた分岐点から外挿するとよいであろう。

¹⁰この点では式(45)は正則であることが保証されている

- 分岐曲線が二次元的に大きくカーブを描いているときは変分方程式に渡すパラメータを交換する。これはパラメータ平面上の分岐曲線の傾きを測定し、自動的に変数交換をおこなうようプログラムで工夫する。

もちろん、変分方程式に渡すパラメータに制限はないので、任意の2変数についてパラメータ平面図をもとめることができる。そのときは、個々のパラメータについて変分方程式を求めておく。

9 例題—Duffing 方程式

Duffing 方程式は、非線形なバネのダイナミクスを表現している。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -ky - c_1x - c_3x^3 + B_0 + B \cos t \end{aligned} \quad (53)$$

ここでの“非線形”とは、変位に比例する復元力のほかに変位の3乗に比例した復元力が働くことを指す。この力学系に外力として、正弦波を加えたときの周期解を考える。式(53)は5つのパラメータ $\lambda = (k, c_1, c_3, B_0, B)$ を持っており、これらパラメータのいろいろな値によって周期解に様々な分岐が生じる。この分岐パラメータがいま知りたいとしよう。

固定点を追うプログラムと分岐曲線をトレースするプログラムに使用する変数、および、この式(53)に対して、付録の公式(A.4)~(A.14)によって変分方程式を計算した結果を表2に与える。ここでは5つのパラメータのうち、 k, c_1, c_3, B_0 は固定した¹¹。

前節で解説した手順によって、Duffing 方程式の、1周期の周期解の分岐図を作成した。 $k = 0.2, c_1 = 0.0, c_3 = 1.0$ 。図9は G_1^1 と G_2^1 と接続するがった先の点において計算が停止する。この点をカस्प点という。もちろん原因はNewton法に与えるJacobi行列(45)が非正則になるためである。この点においても連続的に分岐曲線を追跡する手法も提案されている[6]。

ところで、系から微分方程式を実際に解くより先にあらかじめ得られる情報として重要なものにLiouvilleの定理がある。すなわち、特性方程式(40)の2根 μ_1, μ_2 に対して、次の等式が成り立つ(証明略):

$$\mu_1\mu_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_0} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_0} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_0} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_0} \end{vmatrix} = \exp\left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) dt\right) \quad (54)$$

Duffing 方程式は、この公式によって $\mu_1\mu_2 = \exp(-2\pi k)$ となることが容易に確かめられる。この結果は、

- 式(45)の要素の計算において、式(46)~(48)の第2項以降は計算が不要であることを示している。
- 正の摩擦係数を持つ系($k > 0$)においては $\mu_1\mu_2$ は決して1にならない。したがってNeimark-Sacker分岐は生じない。

などの非常に有用な情報をもたらす¹²。

¹¹表2では B に関する変分方程式しか求めていない

¹²これらの理由を考えてみよ

表 2: Duffing 方程式の変分方程式

変数	計算機変数	微分方程式	初期条件
$x = \varphi_1(t, x_0, y_0, B)$	x_1	$\dot{x}_1 = x_2$	x_0
$y = \varphi_2(t, x_0, y_0, B)$	x_2	$\dot{x}_2 = -kx_2 - c_1x_1 - c_3x_1^3 + B_0 + B \cos t$	y_0
$\partial\varphi_1/\partial x_0$	x_3	$\dot{x}_3 = x_4$	1
$\partial\varphi_2/\partial x_0$	x_4	$\dot{x}_4 = Px_3 - kx_4$	0
$\partial\varphi_1/\partial y_0$	x_5	$\dot{x}_5 = x_6$	0
$\partial\varphi_2/\partial y_0$	x_6	$\dot{x}_6 = Px_5 - kx_6$	1
$\partial\varphi_1/\partial B$	x_7	$\dot{x}_7 = x_8$	0
$\partial\varphi_2/\partial B$	x_8	$\dot{x}_8 = Px_7 - kx_8 + \cos t$	0
$\partial^2\varphi_1/\partial x_0^2$	x_9	$\dot{x}_9 = x_{10}$	0
$\partial^2\varphi_2/\partial x_0^2$	x_{10}	$\dot{x}_{10} = Px_9 - kx_{10} + Qx_3^2$	0
$\partial^2\varphi_1/\partial x_0\partial y_0$	x_{11}	$\dot{x}_{11} = x_{12}$	0
$\partial^2\varphi_2/\partial x_0\partial y_0$	x_{12}	$\dot{x}_{12} = Px_{11} - kx_{12} + Qx_3x_5$	0
$\partial^2\varphi_1/\partial y_0^2$	x_{13}	$\dot{x}_{13} = x_{14}$	0
$\partial^2\varphi_2/\partial y_0^2$	x_{14}	$\dot{x}_{14} = Px_{13} - kx_{14} + Qx_5^2$	0
$\partial^2\varphi_1/\partial x_0\partial B$	x_{15}	$\dot{x}_{15} = x_{16}$	0
$\partial^2\varphi_2/\partial x_0\partial B$	x_{16}	$\dot{x}_{16} = Px_{15} - kx_{16} + Qx_3x_7$	0
$\partial^2\varphi_1/\partial y_0\partial B$	x_{17}	$\dot{x}_{17} = x_{18}$	0
$\partial^2\varphi_2/\partial y_0\partial B$	x_{18}	$\dot{x}_{18} = Px_{17} - kx_{18} + Qx_5x_7$	0

ここで、傍点は時間微分を表し、 $P = -c_1 - 3c_3x_1^2$, $Q = -6c_3x_1$ である。

10 おわりに

分岐図作成においてはここではカバーしきれない、こまかいテクニックが多くある。しばらく分岐曲線を追っていると、その曲線の形状や接続具合などから、「ここらへんにありそうだな」と見当が付くだろう。そこから分岐集合を得るためにパラメータをどう効果的に追い込むかは、経験を積む必要がある。

実際にコンピュータのオペレーションの様子を付録にしたかったのだが、著者の非力で添付できなかった。これは各自デモで体験、もしくは先輩に聞いて欲しい [5]。

また余力のある読者は、現在 3 つに分かれている解析プログラムを一つのパッケージにして欲しい。特に 3 つのプログラム間のデータのやりとりをスムーズに行なえる方法を考案したら使いやすくなるのではないだろうか。

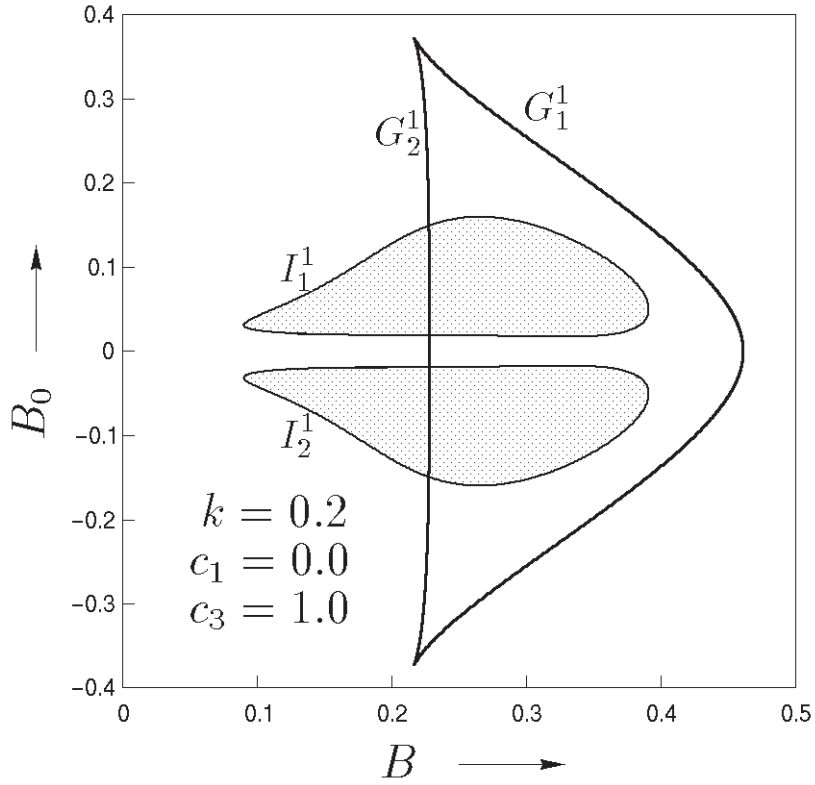


図 2: Duffing 方程式の 1 周期解の分岐; G_i^1 は接線分岐, I_i^1 は周期倍分岐を表している

A 変分方程式

パラメータを含む微分方程式,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t, x, y, \lambda) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(t, x, y, \lambda) \end{aligned} \tag{A.1}$$

を考えたとき, $t = 0$ で初期値 (x_0, y_0) を通る式 (A.1) の解を

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi_1(t, x_0, y_0, \lambda) \\ y(t) &= \varphi_2(t, x_0, y_0, \lambda) \end{aligned} \tag{A.2}$$

とする. すなわち,

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= f_1(t, \varphi_1, \varphi_2, \lambda) \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= f_2(t, \varphi_1, \varphi_2, \lambda) \\ \varphi_1(0, x_0, y_0, \lambda) &= x_0 \\ \varphi_2(0, x_0, y_0, \lambda) &= y_0 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y_0} D_x f\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_0} D_\lambda f\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial \lambda} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial \lambda} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial \lambda} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial \lambda} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} \end{bmatrix}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial y_0} D_\lambda f\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial \lambda} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial \lambda} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial \lambda} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial \lambda} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

参考文献

- [1] H. Kawakami. Bifurcation of periodic responses in forced dynamic nonlinear circuits: Computation of bifurcation values of the system parameters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 31, No. 3, pp. 248–260, Mar 1984.
- [2] L. S. Pontriagin. 常微分方程式. 共立出版, 東京, Japan, 新版, May 1968.
- [3] 川上博. Duffing 方程式にみられる周期解の分岐パラメータの計算. unpublished. 1987 年頃の研究室資料.
- [4] 川上博, 松尾次郎. ダフティング方程式にみられる周期解の分岐集合. 電子通信学会論文誌 A, Vol. 64, No. 12, pp. p1018–1025, December 1981.
- [5] 川上博, 上田哲史. C によるカオス CG. Information & computing. サイエンス社, 1994.
- [6] 北島博之, 川上博. 接線分岐曲線を自動追跡できるアルゴリズムとその duffing 方程式への応用. 電子情報通信学会論文誌. A, 基礎・境界, Vol. 78, No. 7, pp. 806–810, Jul 1995.